BACHELORARBEIT

# Die Gammafunktion

ausgeführt zur Erlangung des akademischen Grades
eines Bachelors unter der Anleitung von

Dr. Stefan Krause

am

**Institut für Analysis und Scientific Computing**
der Technischen Universität Wien

durch

Matthias Hirschmanner
Matr.-Nr. 0927170

Wien, am 6. März 2014

**Kurzfassung**

Die Gammafunktion ist eine spezielle Funktion, die von Leonhard Euler angegeben wurde. Sie stellt die Erweiterung der Fakultätsfunktion dar. In dieser Arbeit wird die Gammafunktion definiert und die Eindeutigkeit von Bohr-Mollerup bewiesen. Es werden verschiedene Eigenschaften der reellen Gammafunktion gezeigt. Dies wird dann auf die komplexen Zahlen erweitert. Im letzten Kapitel wird auf verschiedene Anwendungen der Gammafunktion eingegangen, insbesondere auf ihre Bedeutung für die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Zum Schluss wird noch eine allgemeine Formel zur Berechnung des Volumens der $n$-dimensionalen Kugel hergeleitet.



**Abstract**

The Gamma function is a special function that was introduced by Leonhard Euler. It is an extension of the factorial function. In this exposition its definition and a proof of the Bohr-Mollerup uniqueness theorem are provided. Various properties of $\Gamma(x)$ for real $x$ are established and later extended to complex values of $x$ as well. The last section highlights applications in probability theory and statistics and, finally, discusses formulas for the volume of the $n$-dimensional unit ball.

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Einleitung

Die Gammafunktion wurde das erste Mal vom Schweizer Mathematiker Leonhard Euler (1707–1783) als Erweiterung der Funktion $n!$ von den natürlichen Zahlen $n$ auf komplexe Zahlen $z$ definiert:

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t \quad \text{für} \quad z \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} z > 0$$

## 1.1 Motivation

Das Problem der Fakultätsfunktion

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

ist, dass sie nur für natürliche Zahlen definiert ist. Die Ausdehnung dieser Funktion auf reelle Zahlen bzw. sogar komplexe Zahlen gestaltet sich als schwierig, obwohl man relativ leicht über die Werte interpolieren kann, wie man in Abb. 1.1 erkennt. Es existiert keine Lösung, diese Funktion als einfache endliche Kombination von Summen, Produkten, Potenzen, Logarithmen und Ähnliches darzustellen. Es ist jedoch sehr wohl möglich, eine allgemeine Formel mithilfe von Integralen und Grenzwerten zu finden, worauf in den folgenden Kapiteln eingegangen wird.
Eine Funktion, die für natürliche Zahlen die Fakultätsfunktion repräsentieren soll, muss offensichtlich die Bedingungen

$$f(1) = 1 \quad \text{und} \quad f(x+1) = xf(x)$$

erfüllen. Diese Bedingungen führen jedoch noch nicht dazu, dass die Punkte der Fakultätsfunktion eindeutig verbunden werden können. Dazu benötigt man noch, dass die Funktion $f(x)$ logarithmisch konvex ist. Das bedeutet,

$$\ln(f(x)) \quad \text{ist eine konvexe Funktion.}$$

Zusammen mit den zuvor genannten Bedingungen bildet dies den Satz von Bohr-Mollerup (1922), der besagt, dass eine Funktion die Gammafunktion sein muss, wenn diese Bedingungen erfüllt sind. Dieser Satz wird in Abschnitt 2.2 genau behandelt.

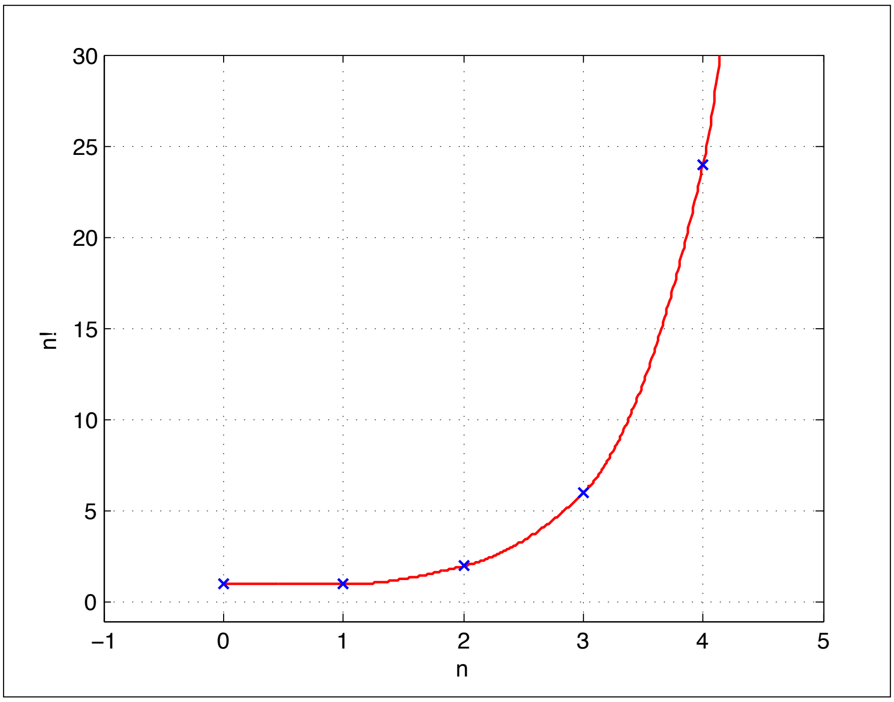


**Abbildung 1.1:** Interpolation der Fakultätsfunktion.

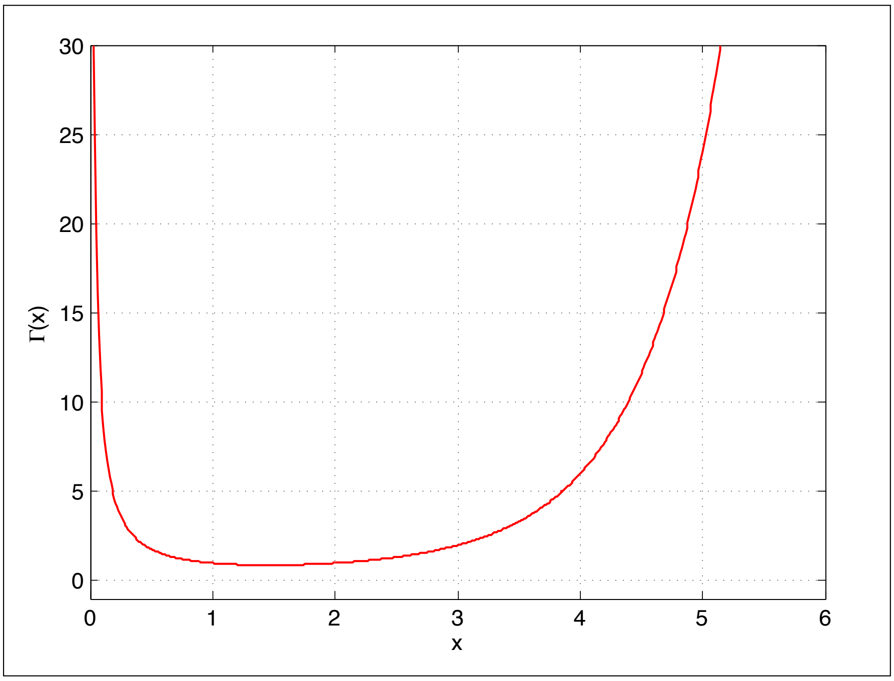


**Abbildung 1.2:** Reelle Gammafunktion für $x > 0$.

# 2 Die Gammafunktion in $\mathbb{R}$

Im ersten Schritt sollen die wesentlichen Eigenschaften der Gammafunktion für reelle Zahlen gezeigt werden, um diese im darauffolgenden Kapitel auf die komplexen Zahlen auszuweiten. Die Ausarbeitungen in diesem Kapitel basieren großteils auf [Sau07] [Smi79].

## 2.1 Integraldarstellung

In diesem Abschnitt soll von der Integraldarstellung der Gammafunktion

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R} : x > 0$$

ausgegangen werden. Der Graph dieser Funktion ist in Abbildung 1.2 zu sehen.

**Satz 2.1** $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R} : x > 0$.

**Beweis:** Man teile das Integral bei $t = t_0$:

$$\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{t_0} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t + \int_{t_0}^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

Für festes $x > 0$ wähle man ein $t_0 > 0$, so dass für alle $t \geq t_0$ gilt

$$t^{x-1}e^{-t} \leq \frac{1}{t^2}.$$

Damit kann man das zweite Integral umformen auf

$$\int_{t_0}^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t \leq \int_{t_0}^\infty \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{t}\Big|_{t_0}^\infty = \frac{1}{t_0} < \infty.$$

Da $e^{-t} \leq 1$ für $t \geq 0$ ist, gilt für

$$\int_0^{t_0} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t \leq \int_0^{t_0} t^{x-1}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{x}t^x\right]_0^{t_0} = \frac{1}{x} \cdot t_0 < \infty.$$

Damit konvergieren beide Teile für $x > 0$ und somit, nach dem Majorantenkriterium, auch $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.

Die Abbildung 1.2 suggeriert, dass die Gammafunktion in der Nähe von $x = 0$ unbeschränkt ist. Tatsächlich gilt für den Grenzwert der Gammafunktion für $x \to 0+$:

$$\begin{aligned}\Gamma(\varepsilon) &= \int_0^\infty t^{\varepsilon-1}e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{\varepsilon-1}e^{-t}\mathrm{d}t + \int_1^\infty t^{\varepsilon-1}e^{-t}\mathrm{d}t \\ &\geq \frac{1}{e}\int_0^1 t^{\varepsilon-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{e\varepsilon}\end{aligned}$$

Lässt man $\varepsilon \to 0+$ gehen, erhält man

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\Gamma(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{e\varepsilon} \leq \infty$$

**Satz 2.2** Die Gammafunktion genügt der Funktionalgleichung

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

**Beweis:** Man setze $x > 0$ voraus und integriere $\Gamma(x+1)$ partiell mit $u(t) := t^x$ und $v'(t) := e^{-t}$, so ist

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\mathrm{d}t = -t^x e^{-t}\Big|_0^\infty + x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$$

Der linke Term verschwindet und somit gilt

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

**Satz 2.3** $\Gamma(1) = 1$

**Beweis:**

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\mathrm{d}t = -\left[e^{-t}\right]_0^\infty = 1$$

**Satz 2.4** $\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}.$

**Beweis:** Mithilfe der Sätze 2.2 und 2.3 kann man einfach zeigen

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\cdots 1\cdot\Gamma(1) = n!\Gamma(1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}.$$

## 2.2 Eindeutigkeitssatz

Die Gammafunktion besitzt noch eine weitere Eigenschaft, sie ist logarithmisch konvex. Dies möge auf den ersten Blick nicht als etwas Herausragendes erscheinen, führt aber dazu, dass die Gammafunktion eindeutig bestimmt ist.

**Definition 2.1** Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}_+$ heißt logarithmisch konvex, wenn eine der beiden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. $\ln(f)$ ist konvex.
2. Es gilt für beliebige $x, y \in I$ und beliebiges $0 < \lambda < 1$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq f(x)^\lambda f(y)^{1-\lambda}$$

**Beweis:** Um auf 2. zu kommen (vgl. [Rog10]), ersetzt man in der allgemeinen Bedingung für konvexe Funktionen

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x)$$

$f$ durch $\ln f$:

$$\ln(f(\lambda x + (1-\lambda)y)) \leq \ln(\lambda f(x) + (1-\lambda) f(x)) = \ln[f(x)^\lambda f(y)^{1-\lambda}].$$

Dies ergibt nach Anwendung der monoton wachsenden Exponentialfunktion die Gleichung in 2.

**Satz 2.5** Die Gammafunktion ist logarithmisch konvex.

**Beweis:** Seien $x, y \in \mathbb{R}_+$ und $0 < \lambda < 1$. Man wähle für

$$p := \frac{1}{\lambda}, \quad q := \frac{1}{1-\lambda} \quad f(t) := t^{\frac{x-1}{p}} e^{\frac{-t}{p}} \quad \text{und} \quad g(t) := t^{\frac{y-1}{q}} e^{\frac{-t}{q}}.$$

Dann gilt $1/p + 1/q = 1$ und die Höldersche Ungleichung (siehe [Her11]) lautet:

$$\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t \leq \left(\int_a^b f(t)^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} \left(\int_a^b g(t)^q \mathrm{d}t\right)^{1/q}.$$

Wenn man

$$f(t)g(t) = t^{\frac{x-1}{p}} e^{\frac{-t}{p}} t^{\frac{y-1}{q}} e^{\frac{-t}{q}} = t^{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}-\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} e^{-t\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} = t^{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}-1} e^{-t}$$

in das Integral einsetzt, folgt

$$\int_a^b t^{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}-1} e^{-t} \mathrm{d}t \leq \left(\int_a^b t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t\right)^{1/p} \left(\int_a^b t^{y-1} e^{-t} \mathrm{d}t\right)^{1/q}.$$

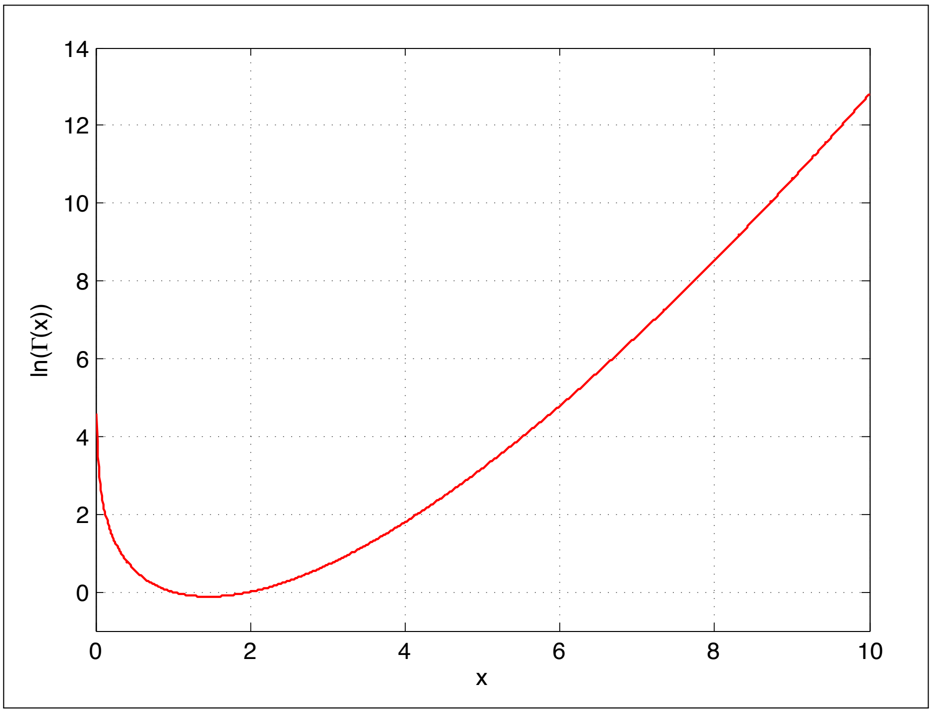


**Abbildung 2.1:** Natürlicher Logarithmus der Gammafunktion

Lässt man nun $a \to 0$ und $b \to \infty$ streben, erhält man

$$\Gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \leq \Gamma(x)^{1/p}\Gamma(y)^{1/q}.$$

Nach dem Einsetzen von $p$ und $q$ ergibt sich die Bedingung für logarithmisch konvexe Funktionen:

$$\Gamma(x\lambda + (1-\lambda)y) \leq \Gamma(x)^{\lambda}\Gamma(y)^{1-\lambda}.$$

**Satz 2.6 Satz von Bohr-Mollerup (1922):**
Die Gammafunktion ist die einzige Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. $f(1) = 1$
2. $f(x+1) = xf(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$
3. $f$ ist logarithmisch konvex.

**Beweis:** Dass die Gammafunktion diese Bedingungen erfüllt, wurde bereits gezeigt. Es ist also nur noch die Eindeutigkeit dieser Funktion zu beweisen.

Wegen den Bedingungen 1 und 2 genügt es, die Werte der Gammafunktion im Intervall $]0,1[$ zu betrachten.
Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$n + x = x(n+1) + (1-x)n$$

und man erhält mithilfe der Definition der logarithmischen Konvexität

$$\begin{aligned} f(n+x) = f(x(n+1) + (1-x)n) &\leq f(n+1)^x f(n)^{1-x} \\ &= n^x f(n)^x f(n)^{1-x} = n^x f(n). \end{aligned}$$

Wegen $0 < x < 1$ kann $x$ in diesem Fall den Platz von $\lambda$ aus dem Satz 2.1 einnehmen. Aufgrund von Satz 2.4 ist

$$f(n+x) \leq n^x f(n) = n^x (n-1)!. \tag{2.1}$$

Analog folgt für $n + 1 = x(n+x) + (1-x)(n+1+x)$

$$\begin{aligned} n! &= f(n+1) \\ &= f(x(n+x) + (1-x)(n+1+x)) \leq f(n+x)^x f(n+1+x)^{1-x} \\ &\qquad = f(n+x)^x (n+x)^{1-x} f(n+x)^{1-x} \\ &\qquad = f(n+x)(n+x)^{1-x}. \end{aligned}$$

Umgeformt ergibt das

$$n!(n+x)^{x-1} \leq f(n+x) \tag{2.2}$$

Aus den Gleichungen 2.1 und 2.2 ergibt sich die Ungleichung

$$n!(n+x)^{x-1} \leq f(n+x) \leq n^x f(n) = n^x (n-1)!. \tag{2.3}$$

Mit Satz 2.2 ergibt sich für

$$f(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)xf(x),$$

womit man Gl. 2.3 anschreiben kann als

$$a_n := \frac{n!(n+x)^{x-1}}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \leq f(x) \leq \frac{n^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} := b_n$$

$$\frac{a_n}{b_n} \leq \frac{f(x)}{b_n} \leq 1$$

Wie man einfach zeigen kann, strebt der Grenzwert der linken Seite ebenfalls gegen den Wert 1:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!(n+x)^{x-1}}{n^x(n-1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!(n+x)^{x-1}}{n!n^{x-1}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{x-1} = 1.$$

Nach dem Einschließungsprinzip (siehe [Szm09]) ist $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x)}{b_n} = 1$ und für $f(x)$ folgt

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x (n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}$$

Da $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+x} = 1$ kann man dieses Ergebnis weiter umformen auf

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^x (n-1)!}{x(x-1)\cdots(x+n-1)} \cdot \frac{n}{n+x} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Dies ist eine weitere Darstellungsform der Gammafunktion, auf die in Abschnitt 3.4 genauer eingegangen wird.

# 3 Die Gammafunktion in $\mathbb{C}$

In den vorangegangenen Kapiteln wurde die Gammafunktion und ihre Eigenschaften für positive reelle Zahlen beschrieben. Die Gammafunktion kann jedoch in ganz $\mathbb{C}\backslash\{0, -1, -2, \dots\}$ fortgesetzt werden, worauf in diesem Kapitel eingegangen wird.

## 3.1 Gammafunktion in der rechten Halbebene

**Satz 3.1** Die Gammafunktion $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0$

**Beweis:** Für reelle Zahlen $> 0$ wurde dies bereits in Satz 2.1 gezeigt. Nun kann man $t^{z-1}$ umformen zu

$$|t^{z-1}| = |t^{x+iy-1}| = t^{x-1}|t^{iy}| = t^{x-1}|e^{iy\ln(t)}| \leq t^{x-1}.$$

Dies bedeutet, dass der imaginäre Teil die Konvergenz nicht beeinflusst.

**Satz 3.2** Die Gammafunktion ist holomorph für $\operatorname{Re} z > 0$.

**Beweis:** Die Holomorphie wird mithilfe der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gezeigt (siehe [Kra11]). Dafür muss die Funktion zuerst in einen reellen und einen imaginären Teil aufgeteilt werden, also $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$.

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{(x+iy-1)\ln(t)}e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{(x-1)\ln(t)}e^{iy\ln(t)}e^{-t}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty e^{(x-1)\ln(t)}\left[\cos(y\ln(t)) + i\sin(y\ln(t))\right]e^{-t}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty e^{(x-1)\ln(t)-t}\cos(y\ln(t))\mathrm{d}t + i\int_0^\infty e^{(x-1)\ln(t)-t}\sin(y\ln(t))\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Es ist also

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \int_0^\infty e^{(x-1)\ln(t)-t}\cos(y\ln(t))\mathrm{d}t\\
v(x,y) &= \int_0^\infty e^{(x-1)\ln(t)-t}\sin(y\ln(t))\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Damit die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind, muss für die partiellen Ableitungen folgendes gelten

$$
u_x(x,y) = v_y(x,y) \quad \text{und} \quad u_y(x,y) = -v_x(x,y) \tag{3.1}
$$

Da die Konvergenz des uneigentlichen Integrals, wegen der Exponentialfunktion, gleichmäßig in $z$ ist, darf man die Ableitung in das Integral ziehen und es gilt

$$
\begin{aligned}
u_x(x,y) &= \int_0^\infty \ln(t)e^{(x-1)\ln(t)-t}\cos(y\ln(t))\mathrm{d}t\\
u_y(x,y) &= -\int_0^\infty \ln(t)e^{(x-1)\ln(t)-t}\sin(y\ln(t))\mathrm{d}t\\
v_x(x,y) &= \int_0^\infty \ln(t)e^{(x-1)\ln(t)-t}\sin(y\ln(t))\mathrm{d}t\\
v_y(x,y) &= \int_0^\infty \ln(t)e^{(x-1)\ln(t)-t}\cos(y\ln(t))\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Man sieht unmittelbar, dass die Gammafunktion die Bedingung 3.1 erfüllt und damit holomorph ist.

## 3.2 Die Gammafunktion auf $\mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N}_0)$

Für $\operatorname{Re} z > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ folgt aus Satz 2.2 (vgl. [AE06])

$$
\Gamma(z+n) = (z+n-1)(z+n-2)\cdots(z+1)z\Gamma(z).
$$

Dies kann man umformen auf

$$
\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}. \tag{3.2}
$$

Die rechte Seite der Gleichung ist eine meromorphe Funktion mit einfachen Polstellen bei $z = 0, -1, -2\ldots$, da für den Zähler die holomorphe Funktion $\Gamma(z+n) = \int_0^\infty t^{z+n-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ eingesetzt werden kann. Damit hat die Funktion 3.2 einen größeren Definitionsbereich als die ursprüngliche Gammafunktion, nämlich $z \in \mathbb{C}$ mit

$$
\operatorname{Re} z > -n \quad \text{und} \quad z \neq 0, -1, -2, \ldots, -n.
$$

Die Zahl $n$ kann nun beliebig groß gewählt werden, damit ist die Funktion definiert auf ganz $\mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N}_0)$. Daher stellt Gleichung 3.2 eine analytische Fortsetzung von $\Gamma(z)$ dar. Diese Fortsetzung ist aufgrund des Identitätssatz (siehe [Kra11]) eindeutig. In den Abbildungen 3.1 und 3.2 ist diese Fortsetzung zu sehen.

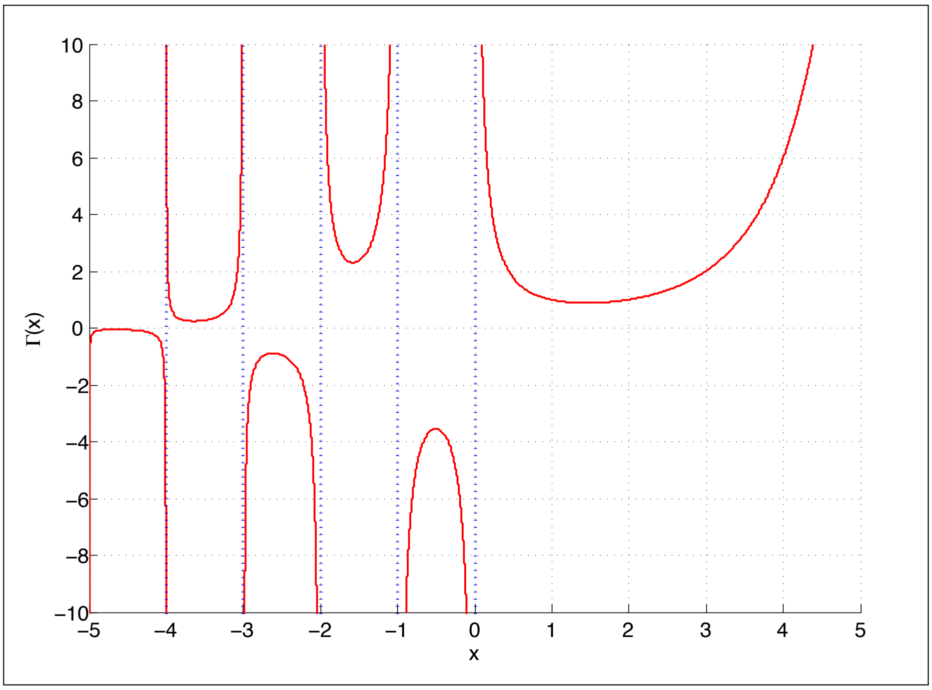


**Abbildung 3.1:** Graph der Gammafunktion entlang der reellen Achse

## 3.3 Residuen

Wie im vorhergehenden Kapitel gezeigt wurde, kann die Gammafunktion auf ganz $\mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N}_0)$ fortgesetzt werden. Es sollen nun die Residuen der Polstellen $-n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ berechnet werden.

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(\Gamma, -n) &= \lim_{z\to -n}(z+n)\Gamma(z) = \lim_{z\to -n}\frac{(z+n)\Gamma(z+n+1)}{(z+n)\cdots(z+1)z}\\ &= \frac{\Gamma(1)}{(-n+n-1)\cdots(-n+1)(-n)} = (-1)^n\frac{1}{n!}\end{aligned}$$

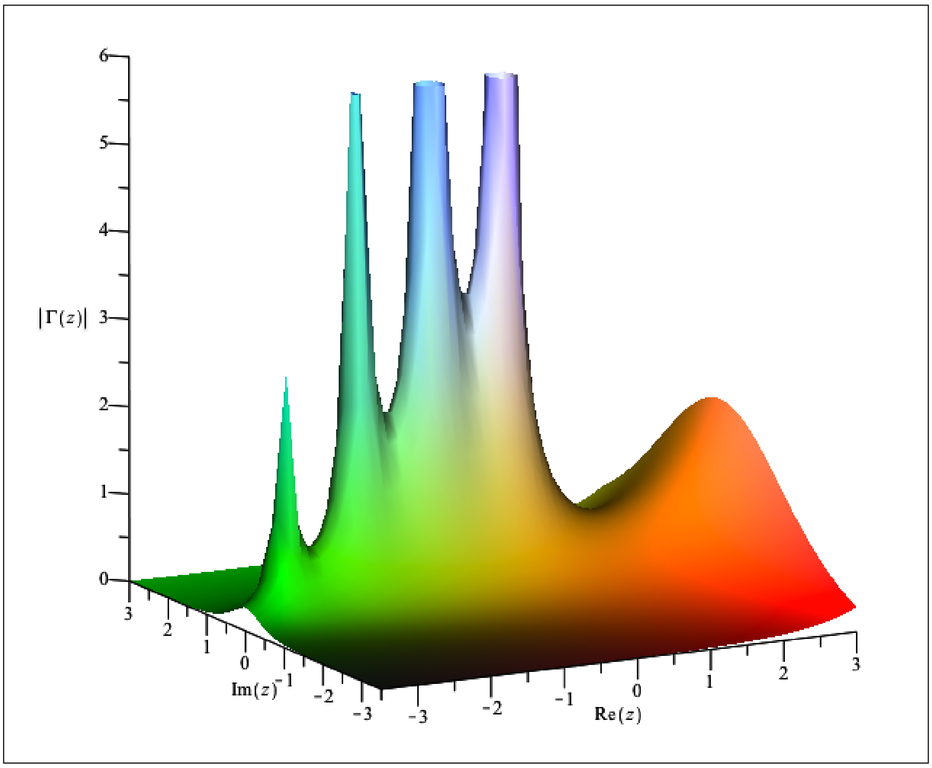


**Abbildung 3.2:** Graph von $|\Gamma(z)|$ in der komplexen Ebene

## 3.4 Gaußsche Produktdarstellung

Die folgende auf Gauß zurückgehende Überlegung führt auf eine relativ einfache Erweiterung der Funktion $s! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot s$ auf beliebiges komplexes Argument.

$$\begin{aligned} s! &= \frac{(n+s)!}{(s+1)(s+2)\dots(s+n)} \\ &= \frac{n!n^s}{(s+1)(s+2)\dots(s+n)}\left[\frac{(n+1)}{n}\cdot\frac{(n+2)}{n}\cdots\frac{n+s}{n}\right]. \end{aligned}$$

Sieht man sich nun den Grenzwert für $n \to \infty$ an, so ergibt der rechte Teil den Wert 1 und man erhält

$$s! = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^s}{(s+1)\dots(s+n)}.$$

Dieser Ausdruck ist nun für alle nicht negativ-ganzen komplexen Zahlen $s$ eindeutig definiert. Es liegt daher nahe, mit

$$\Gamma(z+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{(z+1)\dots(z+n)}$$

für $z \neq -1, -2, -3, \ldots$ eine Erweiterung der Fakultät zu erklären (vgl. [Sch63]).

**Satz 3.3** Die Gaußsche Produktdarstellung

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)}$$

erfüllt die Funktionalgleichung.

**Beweis:**

$$\Gamma(z+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^{z+1}}{(z+1)\ldots(z+n)(z+1+n)}$$

$$z\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{z n! n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^z}{(z+1)\ldots(z+n)}$$

Um die Gleichheit der beiden Terme zu beweisen, erweitere man den letzteren:

$$\begin{aligned} z\Gamma(z) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^z}{(z+1)\ldots(z+n)} \cdot \frac{n(z+n+1)}{n(z+n+1)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n! n^{z+1}}{(z+1)\ldots(z+n)(z+n+1)}}_{\to\Gamma(z+1)} \cdot \underbrace{\frac{z+n+1}{n}}_{\to 1} \end{aligned}$$

Daraus folgt die Funktionalgleichung

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Gleichung 2.4 impliziert, dass der Grenzwert die Gammafunktion für reelle $x$ dastellt. Analog wie in Beweis von Satz 3.2 kann die Holomorphie des Grenzwertes für $\operatorname{Re} z > 0$ gezeigt werden. Weil $\Gamma(z)$ für $\operatorname{Re} z > 0$ ebenfalls holomorph ist, ergibt der Identitätssatz holomorpher Funktionen die Behauptung des Satzes.

## 3.5 Kehrwert

Aus der Gaußschen Produktdarstellung erhält man

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty} \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!} \cdot n^{-z}.$$

Dieser Ausdruck wird nun mit $e^{z\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}$, sowie dessen Kehrwert multipliziert, um auf eine andere Darstellungsform zu kommen:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty} \left[ e^{z\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)} \cdot z \cdot \frac{z+1}{1} \cdot \frac{z+2}{2} \cdots \frac{z+n}{n} e^{-z\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)} \right],$$

bzw.

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty} \left[ e^{z\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)} \cdot z \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}} \right].$$

Lässt man nun $n \to \infty$ gehen, wird aus dem endlichen Produkt das unendliche

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}.$$

Der Grenzwert

$$\gamma := \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

existiert und wurde 1871 von Leonhard Euler berechnet:

$$\gamma = 0.57721566490153\ldots$$

Diese Zahl wird Euler-Mascheroni-Konstante genannt. Damit vereinfacht sich die Darstellung des Kehrwerts der Gammafunktion zu

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{\gamma z} z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}.$$

Daraus kann man in einfacher Weise eine weitere Darstellungsform der Gammafunktion ableiten:

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1} e^{\frac{z}{k}}$$

Man kann die Darstellung des Kehrwerts nutzen, um eine weitere Eigenschaft der Gammafunktion herzuleiten:

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(-z)} = -z^2 \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right), \tag{3.3}$$

## 3.6 Ergänzungssatz

Um die Gleichung 3.3 weiter zu vereinfachen, benötigt man die Produktdarstellung der Sinusfunktion (vgl. [12]). Um diese zu erhalten, werde im ersten Schritt die Fourierreihe der Funktion $f(t) = \cos zt$ mit $z \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ fest, die auf $[-\pi, \pi]$ definiert und darüber hinaus $2\pi$-periodisch fortgesetzt sei, gebildet.

Da diese Funktion gerade ist, können die Fourierkoeffizienten folgendermaßen berechnet werden [Pre10]:

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos zt \cos kt \,\mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((k+z)t) + \cos((k-z)t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\sin((k+z)t)}{k+z} + \frac{\sin((k-z)t)}{k-z}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin((k+z)\pi)}{k+z} + \frac{\sin((k-z)\pi)}{k-z}\right]
\end{aligned}$$

Mithilfe des Additionstheorems

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b,$$

$\sin \pi k = 0$ und $\cos \pi k = (-1)^k$, erhält man für die Fourierkoeffizienten

$$c_k = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k z \sin \pi z}{z^2 - k^2}$$

Daraus ergibt sich nun die Fourierreihendarstellung

$$\cos zt = \frac{z \sin \pi z}{\pi}\left(\frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{z^2-k^2}\cos kt\right).$$

Damit hier Gleichheit für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, muss die $2\pi$-periodische Fortsetzung der Funktion bei $t = \pm\pi$ stetig sein, was einfach zu zeigen ist

$$\cos(\pi) = \cos(-\pi) = 1.$$

Setzt man nun $t = \pi$, erhält man die Partialbruchzerlegung des Kotangens

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-k^2}. \tag{3.4}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist nun eine Reihe, die in $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ lokal gleichmäßig konvergiert und deren Partialsummen holomorph sind. Damit folgt aus dem Satz von Weierstraß (siehe [Kra11]), dass die Funktion holomorph ist. Der Identitätssatz besagt, dass diese Behauptung auf ganz $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ gilt.

**Lemma 3.1** Seien $G$ ein Gebiet und $f, g : G \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe nullstellenfreie Funktionen und gilt

$$\frac{f'}{f} = \frac{g'}{g} \text{ in } G,$$

sowie $f(a) = g(a)$ für ein $a \in G$, so ist $f = g$ in $G$.

**Beweis:** Man kann diese Bedingung einfach umformen auf $f'g - g'f = 0$ in $G$, was aufgrund der Quotientenregel dasselbe ist wie $(f/g)' = 0$ in $G$. Es ist also $f/g$ konstant in $G$ und wegen $f(a) = g(a)$ in $a$ konstant 1, daher ist $f = g$ in $G$.

**Lemma 3.2** Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right).$$

**Beweis:** Die Funktionen $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ seien definiert als:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\sin \pi z}{\pi z} & \text{für } z \neq 0, \\ 1 & \text{für } z = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad g(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right).$$

Das Produkt konvergiert wiederum lokal gleichmäßig, daher sind $f$ und $g$ holomorphe und im Gebiet $G = \mathbb{C} \backslash (\mathbb{Z} \backslash \{0\})$ nullstellenfreie Funktionen. Es gilt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \begin{cases} \pi \cot \pi z - \dfrac{1}{z} & \text{für } z \neq 0, \\ 0 & \text{für } z = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \frac{g'(z)}{g(z)} = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{2z}{z^2 - l^2}\right).$$

Nun entspricht $f'(z)/f(z) = g'(z)/g(z)$ der Gleichung 3.4 und es ist $f(0) = g(0) = 1$. Nach Lemma 3.1 gilt $f(z) = g(z)$ in $G$. Die Darstellung

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$$

gilt offensichtlich auch für $z \in \mathbb{Z}$, da dann beide Seiten 0 ergeben. Man betrachte nun wieder die Ausgangsgleichung aus 3.3 dieser Überlegung

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(-z)} = -z^2 \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right),$$

und man erkennt, dass dies

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(-z)} = -\frac{z \sin(\pi z)}{\pi}.$$

entspricht. Mit der Beziehung

$$\Gamma(-z) = -\frac{\Gamma(1-z)}{z}$$

erhält man nun folgenden Satz ([Smi79]):

**Satz 3.4** Ergänzungssatz:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

## 3.7 Weitere Eigenschaften

Mit der Ergänzungsformel kann man nun relativ einfach das durchaus überraschende Ergebnis für $\Gamma(1/2)$ berechnen, indem man für $z = 1/2$ einsetzt:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right)^{1/2} = \sqrt{\pi}.$$

Damit kann man nun das Integral

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x,$$

das bekannterweise das Integral der Dichtefunktion der Normalverteilung darstellt, berechnet werden. Mit der Substitution $\frac{1}{2}x^2 = t$ folgt

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-t}\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Wenn man die Glockenkurve nun von $-\infty$ bis $\infty$ integriert, erhält man den doppelten Wert des oben berechneten Integrals, da die Funktion symmetrisch ist. Damit wurde gezeigt, dass es sich tatsächlich um eine Dichte handelt.

Im Weiteren wird es sich als nützlich erweisen, eine allgemeine Formel der Werte $\Gamma(n/2 + 1/2)$ und $\Gamma(n/2 + 1)$ für natürliches $n$ zu kennen (vgl. [13]).

**Satz 3.5** Für gerade $n$ gilt

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n/2}} \cdot \prod_{k=1}^{n/2}(2k-1) = \sqrt{\pi} \cdot \prod_{k=1}^{n/2}\frac{2k-1}{2}$$

und

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = (n/2)! = \prod_{k=1}^{n/2}\frac{2k}{2}.$$

**Beweis:** Die Formeln werden mit vollständiger Induktion bewiesen. Für $n = 2$ ist

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

und $\Gamma(2) = 1$. Damit ist der Induktionsanfang erfüllt. Für den Induktionsschluss setze man $n + 2$ in die Formeln ein, somit ist

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{\pi}}{2^{n/2+1}} \cdot \prod_{k=1}^{n/2+1}(2k-1) &= \frac{n+1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2^{n/2}}\cdot\prod_{k=1}^{n/2}(2k-1) = \frac{n+1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\\ &= \Gamma\left(\frac{n+1}{2}+1\right) = \Gamma\left(\frac{(n+2)+1}{2}\right)\end{aligned}$$

und

$$\left(\frac{n}{2}+1\right)! = \left(\frac{n}{2}+1\right)\cdot\left(\frac{n}{2}\right)! = \left(\frac{n}{2}+1\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \Gamma\left(\frac{n+2}{2}+1\right).$$

**Satz 3.6** Die Formeln für ungerades $n$ erhält man durch die Substitutionen $n = n' - 1$ bzw. $n = n' + 1$ als

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \left(\frac{n-1}{2}\right)! = \prod_{k=1}^{(n-1)/2} \frac{2k}{2}$$

und

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{(n+1)/2}}\cdot\prod_{k=1}^{(n+1)/2}(2k-1) = \sqrt{\pi}\cdot\prod_{k=1}^{(n+1)/2}\frac{2k-1}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\frac{2k+1}{2}.$$

**Beweis:** Lediglich die Gültigkeit der ersten Formel für $n = 1$ ist noch zu zeigen.

$$\Gamma(1) = 0! = \prod_{k=1}^{0}\frac{2k}{2} = 1$$

Das Produkt entspricht dem leeren Produkt und hat definitionsgemäß den Wert 1.

# 4 Einige Anwendungen

Die Gammafunktion hat eine Vielzahl von Anwendungen, auch in Fachgebieten, in denen man sie auf den ersten Blick nicht vermutet, wie zum Beispiel Quantenmechanik, Strömungslehre und Astrophysik. Dies hat damit zu tun, dass der Ausdruck $f(t)e^{-g(t)}$ für die exponentielle Abnahme steht, die in der Natur oft vorkommt. Integrale dieses Ausdruckes können (gelegentlich) mithilfe der Gammafunktion gelöst werden. In diesem Kapitel wird in erster Linie auf die Anwendungen im Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik eingegangen. Diese Ausarbeitungen basieren auf [Koh05] und [CK08]. Im letzten Teil wird eine Formel zur Berechnung des Volumens der $n$-dimensionalen Kugel hergeleitet, dies entstammt aus [13].

## 4.1 Chi-Quadrat-Verteilung

Die Summe von $n$ unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen $X_i$ ist wieder normalverteilt. Werden die Zufallsvariablen nun vor der Summierung quadriert, entsteht eine andere Verteilung, alleine schon deswegen, weil keine negativen Werte mehr angenommen werden. Die so entstehende Verteilung heißt $\chi^2$-Verteilung und die Variable

$$U_n = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

ist eine $\chi^2$-verteilte Zufallsvariable mit dem Freitheitsgrad $n$. Die dazugehörige Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}$$

enthält die Gammafunktion und ist abhängig von dem ganzzahligen Wert $n$. Mit dem Wissen

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad \text{und} \quad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

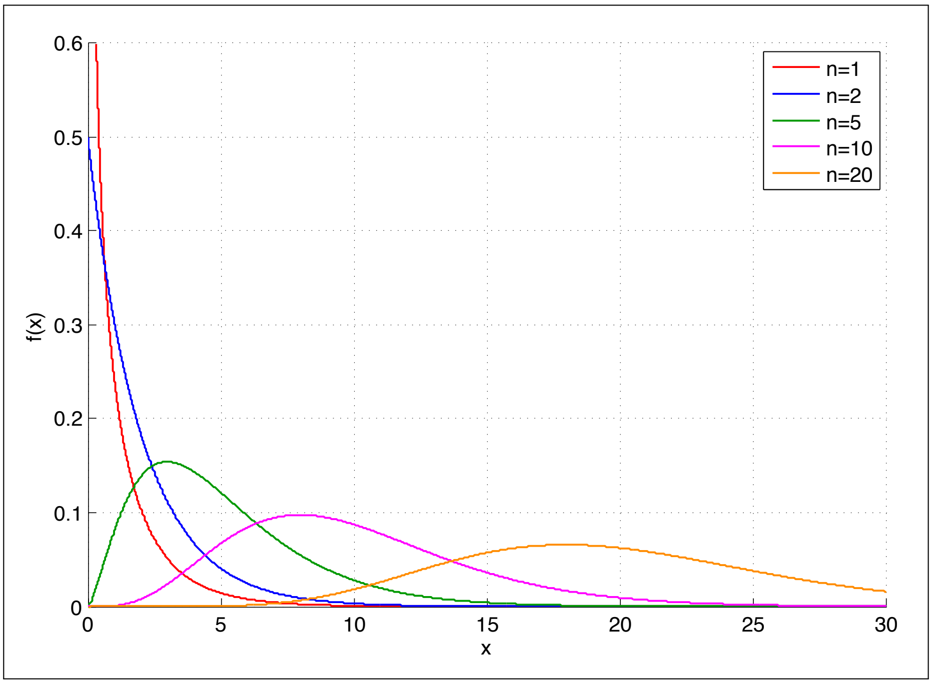


**Abbildung 4.1:** Die Dichtefunktion der $\chi^2$-Verteilung für verschiedene Freiheitsgrade.

kann man die Dichtefunktion relativ einfach berechnen. Sie ist für verschiedene Freiheitsgrade in Abbildung 4.1 skizziert. Die $\chi^2$-Verteilung wird zur Schätzung der Stichprobenvarianz und für den $\chi^2$-Test verwendet.

## 4.2 Gamma-Verteilung

Die Summe der Zufallsvariablen einer Stichprobe aus einer exponentialverteilten Grundgesamtheit ist gammaverteilt. Die Gammaverteilung besitzt die Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{\nu^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\nu x} \quad x \geq 0$$

mit den positiven Parametern $\alpha$ und $\nu$. Für den Erwartungswert und die Varianz erhält man

$$\mathrm{E}(x) = \frac{\alpha}{\nu} \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}(x) = \frac{\alpha}{\nu^2}.$$

Wenn man für die Parameter $\nu = \frac{1}{2}$ und $\alpha = \frac{n}{2}$ wählt, ergibt sich wiederum die $\chi^2$-Verteilung. Damit stellt die Gammaverteilung eine Verallgemeinerung der $\chi^2$-Verteilung dar. Mit der Gammaverteilung kann man die Wartezeiten zwischen Ereignissen bestimmen.

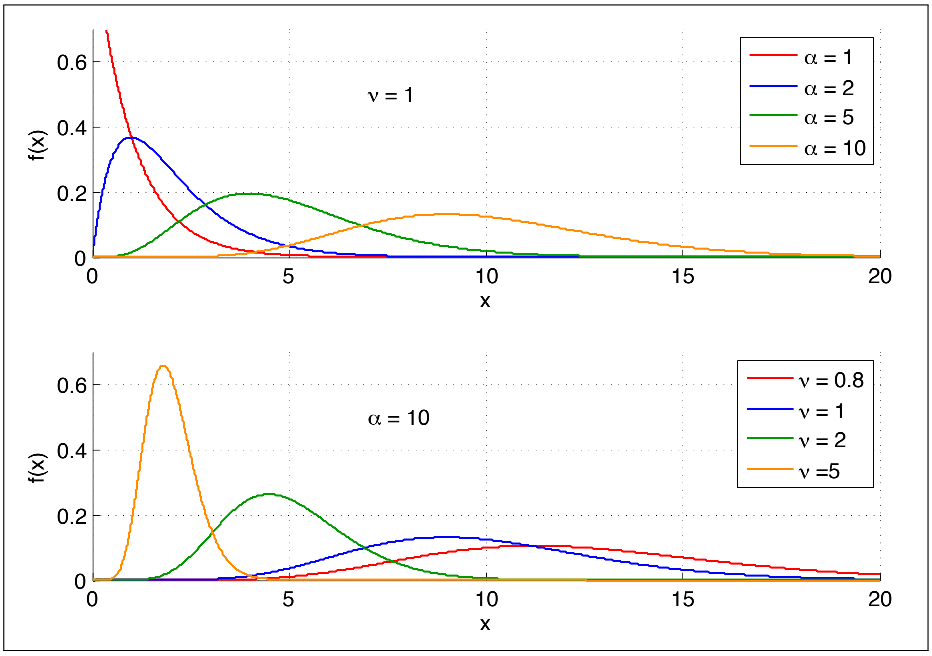


**Abbildung 4.2:** Die Dichtefunktion der Gammaverteilung für verschiedene Parameter.

## 4.3 Volumen und Oberfläche der Kugel im $\mathbb{R}^n$

Die Kugel im $n$-dimensionalen euklidischen Raum ist definiert als Menge der Punkte, deren Abstand zum Mittelpunkt kleiner gleich einer reellen Zahl, dem Radius, ist:

$$K_n(r) = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < r^2 \right\}$$

Für $n = 1$ ist die Kugel das Intervall von $]-r, r[$ mit $V_1(r) = 2r$, für $n = 2$ der Kreis mit $V_2(r) = \pi r^2$ und für $n = 3$ die Kugel mit $V_3(r) = 4\pi r^3/3$. Das Volumen der $n$-dimensionalen Kugel lässt sich mit der Formel

$$V_n(r) = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} \cdot r^n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)} \cdot r^n.$$

berechnen. Dass diese Formel für die oben beschriebenen Fälle gilt, ist mithilfe von Satz 3.5 leicht ersichtlich. Für allgemeines $n$ soll dies mit Induktion gezeigt werden. Wegen der Eigenschaft $V_n(r) = V_n(1)r^n$ reicht es, sich auf das Volumen der Einheitskugel zu beschränken. Für den Induktionsschluss gehe man davon aus, dass die Formel für $n = n' - 1$ richtig sei. Eine $(n-1)$-dimensionale Kugel erhält man, wenn man die $n$-dimensionale

Einheitskugel $K_n(1)$ mit der Ebene $x_n = \text{const}$ schneidet. Der Radius ergibt sich dabei als $\sqrt{1-x_n^2}$. Das Volumen der Einheitskugel kann man nun berechnen als

$$V_n(1) = \int_{-1}^{1} V_{n-1}\left(\sqrt{1-x_n^2}\right) \mathrm{d}x_n = \frac{2\sqrt{\pi^{n-1}}}{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{-1}^{1} (1-x_n^2)^{(n-1)/2} \mathrm{d}x_n.$$

Das Integral ist mit der Substitution $x_n = \cos t$ zu vereinfachen

$$\int_{-1}^{1} (1-x_n^2)^{(n-1)/2} \mathrm{d}x_n = \int_{\pi}^{0} \sin^{n-1}(-\sin t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{\pi} \sin^n t\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{\pi/2} \sin^n t\mathrm{d}t$$

Das Integral von $\sin^n t$ kann mit partieller Integration gelöst werden.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \sin^n t\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} t \sin t\mathrm{d}t \\
&= \underbrace{\left[\sin^{n-1} t(-\cos t)\right]_0^{\pi/2}}_{\to 0} + \int_0^{\pi/2} (n-1)\sin^{n-2} t \cos^2 t\mathrm{d}t \\
&= (n-1)\left[\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} t\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2} \sin^n t\mathrm{d}t\right]
\end{aligned}$$

Nun wird der letzte Term auf die linke Seite gebracht und man erhält die Rekursionsformel

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n t\mathrm{d}t = \frac{(n-1)}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} t\mathrm{d}t.$$

Mit

$$\int_0^{\pi/2} \sin^0 t\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \int_0^{\pi/2} \sin t\mathrm{d}t = [-\cos t]_0^{\pi/2} = 1$$

ergibt sich für gerades $n = 2k$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2k} t\mathrm{d}t = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \prod_{j=1}^{k} \frac{2j-1}{2j}$$

und für ungerades $n = 2k+1$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2k+1} t\mathrm{d}t = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \prod_{j=1}^{k} \frac{2j}{2j+1}.$$

Mit den Sätzen 3.5 und 3.6 kann man dies für beliebiges $n$ zusammenfassen zu

$$2\int_0^{\pi/2} \sin^n t\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Damit folgt für das Volumen

$$V_n(1) = \frac{2\sqrt{\pi^{n-1}}}{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{2\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$V_n(1) = \frac{2\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{n\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

In Abbildung 4.3 ist das Volumen der $n$-dimensionalen Einheitskugel über $n$ dargestellt, wobei man erkennt, dass das Volumen für $n = 5$ ein Maximum erreicht und danach immer kleiner wird. Insbesondere gilt für

$$\lim_{n\to\infty} V_n(1) = 0.$$

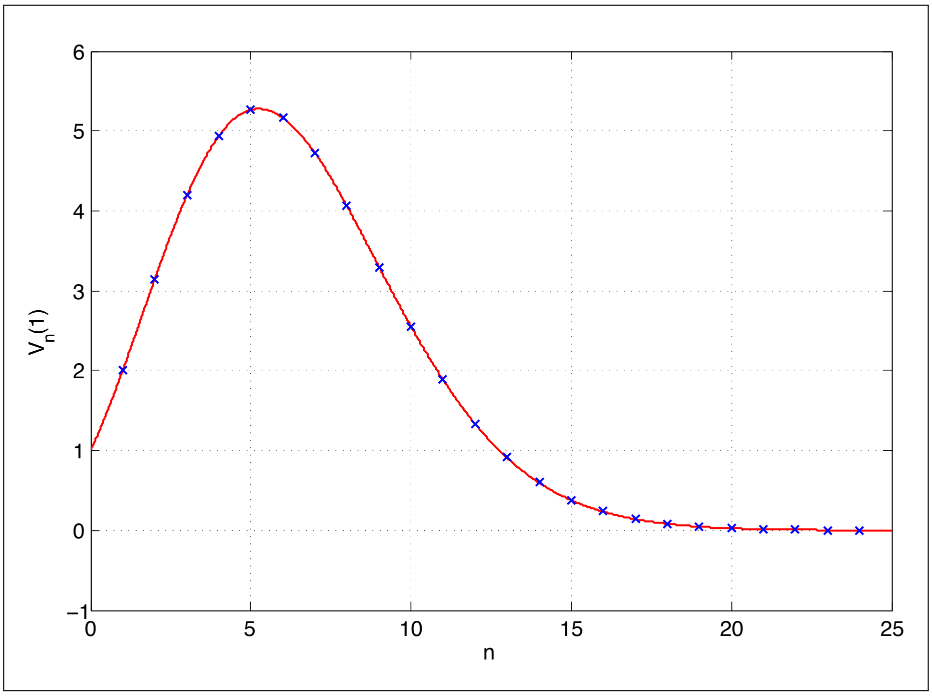


**Abbildung 4.3:** Das Volumen der $n$-dimensionalen Einheitskugel für verschiedene $n$.

Die Formel für die Oberfläche der $n$-dimensionalen Kugel erhält man relativ einfach, da für das Volumen gilt

$$V_n(r) = \int_0^r O_n(t)\mathrm{d}t$$

und dementsprechend lässt sich die Oberfläche berechnen als

$$O_n(r) = \frac{\partial V_n(r)}{\partial r} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot r^{n-1}$$

In Abbildung 4.4 ist die Oberfläche der Einheitskugel gezeichnet, wobei auffällt, dass das Maximum nicht bei $n = 5$, sondern bei $n = 7$ liegt. Danach nimmt die Oberfläche ab und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} O_n(1) = 0.$$

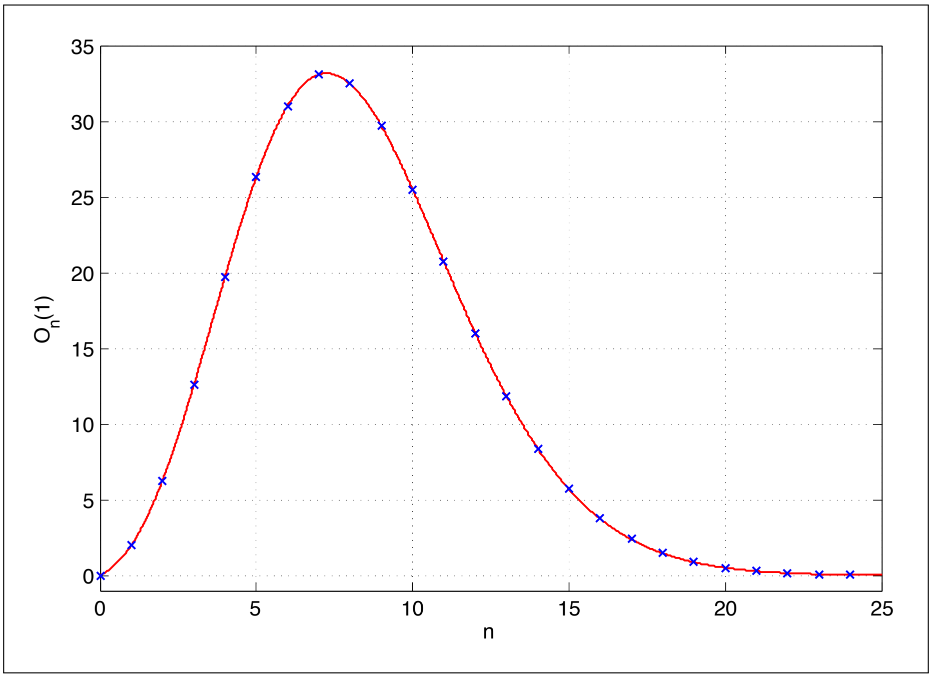


**Abbildung 4.4:** Die Oberfläche der $n$-dimensionalen Einheitskugel für verschiedene $n$.

# Wissenschaftliche Literatur


[AE06] AMANN, Herbert ; ESCHER, Joachim: *Analysis 2*. Basel, Boston, Berlin : Birkhäuser Verlag, 2006

[CK08] CRAMER, Erhard ; KAMPS, Udo: *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 2008

[Her11] HERFORT, Wolfgang: *Mathematik 3 für ET 10/11*. http://www.math.tuwien.ac.at/~herfort/ET/WS10_SS11/skr10.pdf, 2011

[Koh05] KOHN, Wolfgang: *Statistik*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 2005

[Kra11] KRAUSE, Stefan: *Mathematik für Elektrotechnik, Bakkalaureatsvertiefung, 1. Teil: Komplexe Analysis*. Technische Universität Wien, 2011. – http://www.jokr.de/stefan/skripten/BakkVertKanaVo.pdf

[Pre10] PRECHTL, Adalbert: *Signale und Systeme 1*. Technische Universität Wien, 2010

[Rog10] ROGGE, Lothar: *Analysis I-II*. http://www.uni-due.de/~hn213me/sk/rogge/Ana30.pdf, 2010

[Sau07] SAURE, Daniel: *Existenz und Eigenschaft der Gammafunktion, Proseminar Ausarbeitung*. 2007. – https://dl.dropboxusercontent.com/u/8257712/SaureGammafunktion.pdf

[Sch63] SCHÄFKE, Friedrich: *Einführung in die Theorie der Speziellen Funktionen der Mathematischen Physik*. Berlin, Göttingen, Heidelberg : Springer, 1963

[Smi79] SMIRNOW, Wladimir I.: *Lehrgang der höheren Mathematik, Teil III/2*. Berlin : Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1979

[Szm09] SZMOLYAN, Peter: *Mathematik 1 für ET*. Technische Universität Wien, 2009

# Internet Referenzen


[12] Thomas Mathe-Seiten. *Fourier-Reihen*, September 2012. `http://www.mathe-seiten.de/fourier.pdf`.

[13] Thomas Mathe-Seiten. *Wallis-Produkt, Gammafunktion und n-dimensionale Kugeln*, September 2012. `http://www.mathe-seiten.de/kugel.pdf`.


Alle Grafiken wurden mithilfe von Matlab und Maple erstellt.